TỪ THỦY ĐỘNG LỰC HỌC
(Magnetohydrodynamic)

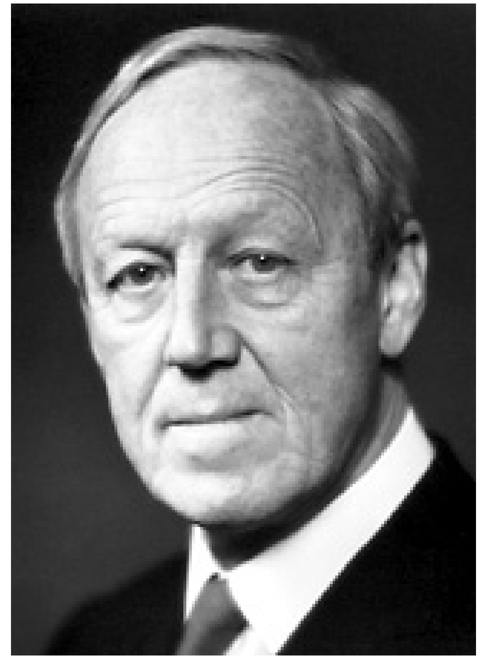
Phạm Thanh Tâm

1. History of MHD
2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

1. History of MHD

- **Hannes Alfvén** (1908-1995), người đầu tiên nêu lên ý tưởng về MHD → Giải Nobel năm 1970

- 1936 – 1937, ***Hartmann*** *và* ***Lazarus*** đưa ra dạng lý thuyết và nghiên cứu MHD trong ống dẫn.



Hannes Olof Gösta Alfvén
(1908- 1995)

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

MHD = interaction between magnetic field and dòng plasma

+ Plasmas là môi trường liên tục
+ Vận tốc plasma nhỏ hơn nhiều so với c

Hydrodynamic equations

$$\frac{d}{dt}\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v} = 0$$ → **Phương trình liên tục**

$$\frac{d}{dt}\ln\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0,$$ → **Phương trình đoạn nhiệt**

$$\rho\frac{d}{dt}\vec{v} = -\nabla p$$ → **Định luật 2 Newton**

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)$$

$\gamma = (s+2)/s$ **Tỉ số nhiệt** **s: số bậc tự do**

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

Phương trình Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

$\vec{B}$: magnetic field, $\vec{E}$: electric field

$\vec{j}$: electric current density

ρ_c: net electric charge density

μ_0: permeability of free space

ϵ_0: permittivity of free space

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

Xấp xỉ

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_c}{\epsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} \sim \frac{E_0}{L_0}, \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim \frac{B_0}{t_0}$$

$$\Rightarrow \quad E_0 \sim B_0 L_0 / t_0 = B_0 v_0$$

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

Xấp xỉ

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} \sim \frac{B_0}{L_0}, \ \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{1}{c^2}\frac{E_0}{t_0}$$

Nhưng $E_0 \sim B_0 v_0$

$$|\nabla \times \vec{B}| : \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \sim \frac{c^2}{v_0^2} \gg 1$$

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ có thể bỏ qua khi $v_0 \ll c$

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

Phương trình chuyển động của hạt mang điện trong plasma

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} = -\nabla p + \vec{j}\times\vec{B}$$

$$p = p_e + p_p$$

Lực Lorent

Định luật Ohm

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$$

2. PLASMA = Magneto + hydrodynamic equations

MHD equations $=$ fluid $+$ $\vec{B}$ field

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\right) \ln\left(p\rho^{-\gamma}\right) = 0,$$

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}\right) = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0}\left(\nabla \times \vec{B}\right) \times \vec{B}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(-\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \vec{B}\right)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{j} = \frac{\nabla \times \vec{B}}{\mu_0}, \quad \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} + \frac{\vec{j}}{\sigma}$$

$$\rho_c = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$$

Phương trình cảm ứng từ B

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \frac{1}{\mu_0 \sigma}\nabla \times \vec{B}\right)$$

Biết v → B và ngược lại

Độ khuếch tán từ $\eta = 1/(\mu_0\sigma) = const$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \underbrace{\nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)}_{(1)} + \underbrace{\eta \nabla^2 \vec{B}}_{(2)}$$

$$\frac{(1)}{(2)} \; □ \; \frac{V_0 B_0}{L_0} : \eta \frac{B_0}{L_0^2} = \frac{L_0 V_0}{\eta} \equiv R_m$$

Số từ Reynolds

R_m □ $1?$

R_m □ $1?$

Phương trình cảm ứng từ B

$R_m \ll 1$

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \eta \nabla^2 \vec{B}$$ Phương trình khuếch tán

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \sim \frac{B_0}{\tau_d}$$

$$\eta \nabla^2 \vec{B} \sim \frac{\eta B_0}{L_0^2}$$

$$\tau_d = \frac{L_0^2}{\eta}$$ Thời gian khuếch tán $v_d = L_0 / t_d = \boxed{\frac{\eta}{L_0}}$

- in reality, $\tau_d = ?$ Take the Sun, $L_0 \sim R_\odot = 7 \times 10^5 \text{km}$, $\eta = 1 \text{m}^2\text{s}^{-1}$, then $\tau_d \approx 10$ Giga years!

Phương trình cảm ứng từ B

$$R_m \gg 1$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Sự bảo toàn thông lượng từ trường

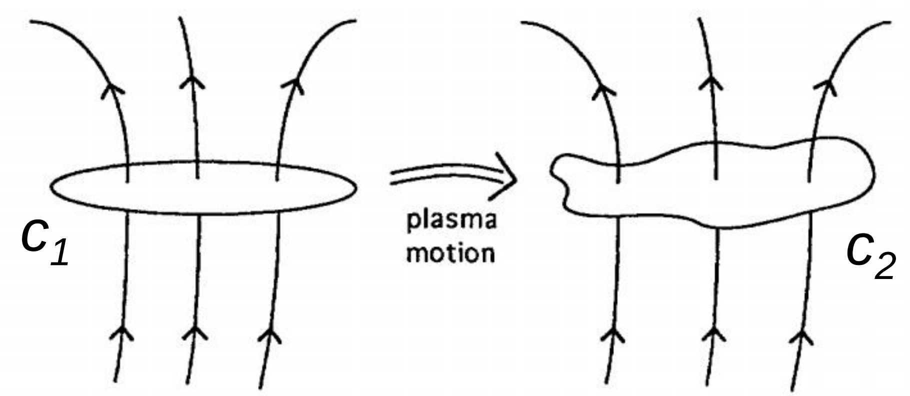


Fig. 2.6. Magnetic flux conservation - if a curve C_1 is distorted into C_2 by a plasma motion, the flux through C_1 at t_1 equals the flux through C_2 at t_2

$$Faraday \rightarrow \frac{\partial B}{\partial t} = -\nabla \times E$$

Định luật Ohm: $E + v \times B = 0$ Từ trường là plasma lạnh

PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG

MHD equations = fluid + $\vec{B}$ field

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \ln \left(p \rho^{-\gamma} \right) = 0,$$

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{\mu_0} \left(\nabla \times \vec{B} \right) \times \vec{B}}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \left(-\vec{v} \times \vec{B} + \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \vec{B} \right)$$

PHƯƠNG TRÌNH ĐỘNG LƯỢNG

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)=-\nabla p+\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}$$

1: $-\nabla p$

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\nabla\times\vec{B}\right)\times\vec{B}=-\nabla\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)+\frac{\vec{B}\cdot\nabla\vec{B}}{\mu_0}$$

2: $-\nabla\left(\frac{\vec{B}^2}{2\mu_0}\right)$

Magnetic pressure gradient

Magnetic tension

$\frac{1}{2} \longrightarrow$ $$\beta\equiv\frac{p}{B^2/2\mu_0}$$ Thông số beta

$\beta \gg 1$: Ảnh hưởng bởi áp suất nhiệt

$\beta \ll 1$: Ảnh hưởng bởi lực Lorentz

Summary

MHD = fluid eqs + Lorentz force

Phương trình cảm ứng: R_m

$R_m \ll 1$: khuếch tán

$R_m \gg 1$: Sự bảo toàn thông lượng từ trường

Phương trình động lượng

$\beta \ll 1$: Lorentz force

$\beta \gg 1$: thermal pressure

Lorentz force = magnetic pressure gradient + tension

magnetic pressure